Les matrices

1) Méthode 1 :

Comment montrer qu'un ensemble de matrices est un sous espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $M_n(\mathbb{K})$?

On peut montrer que E est non vide et stable par combinaison linéaire. Si l'expression des matrices fait intervenir des scalaires arbitraires, on écrit chaque matrice comme combinaison linéaire de matrices fixes, ce qui répond à la question et fournit une base de E.

2) Méthode 2 :

Comment calculer le rang de A ?

On calcule le rang de A (élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})$) par une méthode du pivot sur les colonnes (ou le lignes), en essayant d'éviter des pivots dépendant d'un paramètre. Lorsque cela n'est plus possible, on fait des discussions suivant la nullité ou non du coefficient que l'on veut prendre pour pivot, pour continuer la méthode.

Il est parfois possible de calculer très simplement le rang d'une matrice, en supprimant une colonne nulle, ou une colonne proportionnelle à une autre, puis en permutant lignes ou colonnes de façon à se « rapprocher » d'une matrice échelonnée, ce qui permet de lire directement le rang de cette matrice.

3) Méthode 3 :

Comment savoir si un vecteur v de E appartient au sous espace vectoriel engendré par une famille F de vecteurs de E, ou comment déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les composantes d'un vecteurs de E ?

On écrit la matrice $A = M_B(F)$ et la matrice $A_1=M_B(F \cup \{v\})$. $v \in \mathrm{Vect}(F) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1)$

Si on connaît le rang m de A (c'est-à-dire celui de la famille F) , on cherche si $\mathrm{rg}(A_1) = m$ à l'aide de la méthode du pivot, sinon on calcule simultanément $\mathrm{rg}(A_1)$ et $\mathrm{rg}(A)$, avec la méthode du pivot sur les colonnes sur A_1. Lorsque v est pris quelconque, cette méthode fournit la (ou les équations) de Vect(F).

4) Méthode 4 :

Comment montrer qu'une famille de vecteurs est une base, à l'aide de matrices ?

Montrer que $(f_1,...,f_n)$ est une base de E (rapporté à une base B) revient à montrer que $M_B(f_1,...,f_n)$ est inversible, ou de rang n.

5) Méthode 5 :

Comment montrer qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible et éventuellement calculer son inverse ?

1. On peut essayer de montrer que rg(A) = n (par méthode du pivot sur lignes ou colonnes), ou, dans le cas n=2 ou 3, on prouve par calcul que $\det(A) \neq 0$. Pour le calcul de l'inverse, on résout $Y = AX \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$, d'inconnue X.
2. On peut chercher une relation de la forme $AM = I_n$ (ou bien $MA = I_n$) ; cette relation peut s'obtenir dans certains cas en exprimant A^2 (ou A^3) en fonction de A et I_n (ou A^2, A et I_n) et en factorisant ; cette opération fournit l'inverse de A.
3. Le critère d'invisibilité d'une matrice triangulaire est à connaître absolument.

6) Méthode 6 :

Comment calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée A ?

1. Trouver une «forme» simple dans le calcul des puissances successives.
2. Utiliser une décomposition de A sous la forme A = K + L, K et L simples (souvent K ou L est une matrice scalaire) et de puissances faciles à déterminer et qui vérifient en outre : KL = LK. La formule du binôme donne alors une expression de A^n.
3. Si on connait un polynôme annulateur P de la matrice A, on peut calculer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P et alors : $A^n=R_n(A)$
4. Montrer par récurrence qu'il existe par exemple des suites de scalaire (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_nA+b_nI_n$, et les relations entre a_{n+1},b_{n+1},a_n et b_n permettent de les déterminer